Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 02, No. 2 (2013), hal 107 - 114.

ISOMORFISMA DARI $SU(2)/\ker\varphi$ KE $SO(3)$

Arif Rahman, Nilamsari Kusumastuti, Yundari

INTISARI

Suatu grup dapat dibentuk dari himpunansemua matriks spesial ortogonalterhadap operasi perkalian matriks biasa yang disebutGrup Spesial Ortogonal, dinotasikan dengan SO(3). Sementara itu,suatu grup dapat pula dibentuk dari himpunan semua matriks spesial uniterterhadap operasi perkalian matriks biasayang disebut Grup Spesial Uniter, dinotasikan dengan SU(2). Terdapat homomorfisma φyang memetakan setiap elemen di SU(2) ke elemen di SO(3), dengan kernel dari φ adalah ker φ={I,-I}.Himpunan ker φ merupakan subgrup normal dari SU(2), sehingga dapat dibentuk grup faktor dari SU(2) oleh ker φ yang dinotasikan dengan SU(2)/ker φ. Dengan menggunakan Teorema Fundamental Homomorfisma, dapat ditunjukkan bahwa terdapat isomorfisma dari SU(2)/ker φ ke SO(3).

Kata Kunci :*Grup Spesial Ortogonal, Grup Spesial Uniter, Isomorfisma.*

PENDAHULUAN

Teori Grup merupakan salah satu teori dalamilmu matematika yang dapat diaplikasikan pada ilmu fisika. Teori grupdapat membantu dalam menjelaskan teori rotasi elektron suatu atom.Elektron berotasi terhadap inti atom menyebabkan terjadinya momentum sudut [1].Selain melakukan rotasi terhadap inti atom, elektron juga berotasi terhadap orbit rotasinya, yang menyebabkan munculnya momentum spin [2]. Pada ruang vektor berdimensi tiga atas bilangan real ($\mathbb{R}^3$), sebarang rotasi dapat direpresentasikan dengan matriks R berukuran 3×3. Matriks rotasi R mengawetkan operasi hasil kali dalam di $\mathbb{R}^3$ [3]. Sehingga matriks R merupakan matriks ortogonal. Matriks orthogonal memiliki nilai determinan1 atau (-1). Jika $\det(R)=1$, maka R disebut matriks spesial ortogonal. Sementara itu, pada ruang vektor berdimensi dua atas bilangan kompleks ($\mathbb{C}^2$), jika terdapat sebarang matriks U berukuran 2×2 sedemikian sehingga berlaku $\langle U\mathbf{z}, U\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{z},\mathbf{w}\rangle$ untuk sebarang $\mathbf{z},\mathbf{w} \in \mathbb{C}^2$, maka U disebut matriks uniter [4]. Jika $\det(U) = 1$, maka U disebut matriks spesial uniter.

Suatu grup dapat dibentuk dari himpunan semua matriks spesial ortogonal berukuran 3×3 yang dilengkapi dengan operasi perkalian matriks biasa yang disebut Grup Spesial Ortogonal dan dinotasikan dengan $SO(3)$. Selain itu, suatu grup dapat pula dibentuk dari himpunan semua matriks spesial uniter berukuran 2×2 yang dilengkapi dengan operasi perkalian matriks biasa yang disebutGrup Spesial Uniter dan dinotasikan dengan $SU(2)$. Di dalam Fisika, $SO(3)$ dan $SU(2)$ masing-masing merupakan representasi dari momentum sudut dan momentum spin elektron [5].

Penelitian ini bertujuanuntuk mengkaji secara teori mengenaikaitan dari $SU(2)$ ke $SO(3)$ danmenunjukkan isomorfisma dari $SU(2)/\ker\varphi$ ke $SO(3)$. Untuk mencapai tujuan penelitian, terlebih dahulu didefinisikan mengenai $SU(2)$ dan $SO(3)$. Selanjutnya dibentuk pemetaan φ dari $SU(2)$ ke $SO(3)$. Kemudian dibuktikan bahwa φ adalah homomorfisma surjektif. Langkah selanjutnya adalah dibentuk himpunan semua elemen $SU(2)$ yang dipetakan ke elemen di $SO(3)$, yang dinotasikan dengan $\ker\varphi$. Setelah itu dibentuk grup faktor dari $SU(2)$ oleh $\ker\varphi$ yaitu $SU(2)/\ker\varphi$. Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema Fundamental Homomorfisma, ditunjukkan isomorfisma dari $SU(2)/\ker\varphi$ ke $SO(3)$.

TEORI GRUP

Suatu himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ disebut grup jika $*$ bersifat asosiatif, terdapat elemen identitas di G dan setiap elemen di G memiliki invers di G. Beberapa contoh grup adalah $(M_3^{**}(\mathbb{R}),\cdot)$ dan $(M_2^{**}(\mathbb{R}),\cdot)$. Grup $(M_3^{**}(\mathbb{R}),\cdot)$ menyatakan himpunan semua matriks berukuran 3×3 atas semua bilangan real yang memiliki nilai determinan1 dan himpunan tersebut dilengkapi dengan operasi perkalian matriks biasa. Sedangkan $(M_2^{**}(\mathbb{R}),\cdot)$ merupakan himpunan semua matriks berukuran 2×2 atas semua bilangan kompleks yang memiliki nilai determinan1 dan himpunan tersebut dilengkapi dengan operasi perkalian matriks biasa. Untuk selanjutnya $(M_3^{**}(\mathbb{R}),\cdot)$ dan $(M_2^{**}(\mathbb{R}),\cdot)$ disingkat penulisannya menjadi $(M_3^{**}(\mathbb{R}),\cdot)$ dan $(M_2^{**}(\mathbb{R}),\cdot)$.

Jika diberikan $(G,*)$ dan $(G',*')$ adalah sebarang dua grup dan terdapat pemetaan $\varphi: G\to G'$ sedemikian sehingga untuk setiap $a,b\in G$ berlaku $\varphi(a*b)=\varphi(a)*'\varphi(b),$ maka φ disebut homomorfisma. Dengan kata lain, suatu homomorfisma mengawetkan operasi pada grup. Homomorfisma φ yang memenuhi sifat bijektif disebut isomorfisma. Jadi, definisi isomorfisma pada grup sebagaimana diberikan pada Definisi 1.

Definisi 1 [6]*Suatu homomorfisma φ dari grup G ke grup G' disebut isomorfisma jika φ memenuhi:*

(i) untuk setiap $a,b\in G$ berlaku jika $\varphi(a)=\varphi(b)$ maka $a=b$

(ii) untuk setiap $x\in G'$ terdapat paling tidak satu $a\in G$ sehingga berlaku $\varphi(a)=x$.

Himpunan semua elemen G yang dipetakan ke elemen identitas di G' melalui homomorfisma φ disebut *kernel* φ, yang dinotasikan dengan $\ker\varphi$. Sementara itu, himpunan semua elemen G' yang merupakan hasil pemetaan φ disebut *image*, yang dinotasikan dengan $\varphi[G]$. Dengan demikian kernel merupakan subgrup di G dan image merupakan subgrup di G'. Subgrup adalah himpunan bagian dari grup yang padanya juga memenuhi syarat terbentuknya suatu grup. Hal ini menunjukkan bahwa subgrup dari suatu grup juga merupakan grup. Suatu subgrup yang memiliki himpunan koset kanan yang sama dengan himpunan koset kirinya, maka subgrup tersebut dinamakan subgrup normal.

Teorema 2 [6] *Diberikan $\varphi: G\to G'$ adalah homomorfisma dari G ke G'. Himpunan $\ker\varphi$ merupakan subgrup normal dari G.*

Misalkan H subgrup normal dari G, maka untuk setiap $g\in G$, koset kanan Hg sama dengan koset kiri gH di G. Himpunan G/H yang didefinisikan dengan $G/H=\{gH \mid g\in G\}$ merupakan himpunan semua koset dari subgrup normal H di G, maka G/H disebut sebagai grup faktor terhadap operasi yang didefinisikan di G. Karena kernel dari suatu homomorfisma φ adalah subgrup normal di G, maka pada G dapat dibentuk grup faktor yang berhubungan dengan $\ker\varphi$, yang dinotasikan dengan $G/\ker\varphi$.

Teorema 3 [6] *Diberikan H adalah subgrup normal dari G dan didefinisikan suatu pemetaan γ dari G pada grup faktor G/H yaitu $\gamma(g)=gH$ untuk setiap $g\in G$, maka γ adalah homomorfisma dari G pada G/H. Homomorfisma γ disebut homomorfisma natural dari G pada G/H.*

Isomorfisma grup dapat ditunjukkan dengan Teorema Fundamental Homomorfisma, sebagaimana yang diberikan pada Teorema 4.

Teorema 4 [6] *Diberikan* G, G' *adalah grup dan* $\varphi : G \to G'$ *adalah homomorfisma surjektif, dengankernel* $\ker\varphi$, *maka terdapat suatu isomorfisma dari* $G/\ker\varphi$ *ke* G'.

GRUP $SU(2)$ DAN $SO(3)$

Pada penelitian ini dibahas grup dengan anggota-anggotanya berupa matriks-matriks. Untuk itu dibahas terlebih dahulu teori mengenai matriks. Matriks yang digunakan pada penelitian ini perlu didefinisikan terlebih dahulu. Diberikan $U=[u_{ij}]$ adalah matriks persegi dengan elemen bilangan kompleks,$u_{ij} \in \mathbb{C}$. Konjugat dari matriks kompleks$U$, dinotasikan dengan $\overline{U}$, adalah matriks yang diperolehdengan menentukan konjugat dari u_{ij}. Notasi khusus U^* digunakan untuk suatu transpos konjugat dari U. Jika sebarang $U \in M_n(\mathbb{C})$ memenuhi syarat $U^*U = UU^* = I$ maka U disebut matriks uniter. Sementara itu, jika $U = U^*$, maka U disebut matriks hermit. Karena U merupakan matriks persegi, maka U memiliki determinan. Jika U matriks uniter dengan $\det(U) = 1$, U disebut matriks spesial uniter. Pada penelitian ini digunakan matriks spesial uniter berukuran 2×2. Hal ini sebagaimana diberikan pada Definisi 5.

Definisi 5[7]*Diberikan* $U \in M_2(\mathbb{C})$. *Matriks* U *disebut matriks spesial uniter jika memenuhi:*

(i) $U^*U = UU^* = I$

(ii) $\det(U) = 1$

Berdasarkan Definisi 5, diberikan sebarang U adalah anggota dari $(M_2(\mathbb{C}))$. Karena U adalah matriks spesial uniter maka U merupakan anggota dari $(M_2^{**}(\mathbb{C}))$. Karena $(M_2^{**}(\mathbb{C}))$ merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks, maka dibentuk Teorema 6.

Teorema 6*Diberikan* $(M_2^{**}(\mathbb{C}))$ *adalah grup terhadap operasi perkalian matriks biasa, maka himpunan semua matriks spesial uniter , dinotasikan dengan* $SU(2)$, *terhadap operasi perkalian matriks biasa merupakan subgrup dari* $(M_2^{**}(\mathbb{C}))$.

Bukti:

Ambil sebarang dua elemen $SU(2)$, misalnya $U_1, U_2 \in SU(2)$ dengan $U_1 = [s_{ij}]$, $U_2 = [t_{ij}]$ dan $\det(U_1) = \det(U_2) = 1$, $U_1U_1^* = U_2U_2^* = I$ sedemikian sehingga akan dibuktikan bahwa untuk setiap $U_1, U_2 \in SU(2)$ berlaku $U_1(U_2)^{-1} \in SU(2)$. Matriks $U_2 = [t_{ij}]$ memiliki invers yaitu $(U_2)^{-1} = [t_{ij}^*]$. Karena hasilkali dari bilangan-bilangan kompleks juga merupakan bilangan kompleks, maka $U_1(U_2)^{-1}$ berada di $SU(2)$. Selanjutnya $\det(U_1U_2^{-1}) = \det(U_1)\det(U_2) = 1$ dan $(U_1U_2^*)^*(U_1U_2^*) = U_2(U_1^*U_1)U_2^* = I$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $SU(2)$ merupakan subgrup dari $(M_2^{**}(\mathbb{C}))$ terhadap operasi perkalian matriks. Untuk selanjutnya grup $(SU(2),\cdot)$ dinotasikan dengan $SU(2)$. ■

Sebarang $U \in SU(2)$ dapat disederhanakan bentuknya mengikuti definisi yang menyertainya. Diberikan sebarang matriks $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, mudah dilihat bahwa invers dari U adalah

$$U^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan sifat matriks spesial uniter bahwa $UU^*=I$ dan $\det U=1$, maka diperoleh $U^*=U^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Akibatnya $a^*=d, b^*=(-c)\Leftrightarrow -b^*=c$, maka untuk sebarang matriks $U\in SU(2)$ secara umum dapat ditulis sebagai berikut

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{1}$$

dengan $\det U=aa^*+bb^*=|a|^2+|b|^2=1$.

Pada matriks atas bilangan real, jika baris dan kolom suatu matriks dipertukarkan posisinya maka akan membentuk suatu matriks baru yang dikenal dengan matriks transpos. Apabila hasil perkalian suatu matriks persegi dengan matriks transposnya adalah matriks identitas, maka matriks tersebut dinamakan matriks ortogonal. Diberikan $A\in M_n(\mathbb{R})$, karena A adalah matriks ortogonal, maka $\det(A)$ memiliki nilai yang sama dengan $\det(A^T)$, dengan kata lain $\det(AA^T)=(\det(\mathrm{A}))^2=1$. Hal ini menunjukkan bahwa A memiliki nilai determinan yaitu 1 atau (-1). Pada penelitian ini digunakan matriks ortogonal berukuran 3×3. Matriks A yang memiliki nilai determinan satu merupakan matriks khusus sebagaimana yang diberikan pada Definisi 7.

Definisi 7[7] *Diberikan $A\in M_3(\mathbb{R})$. Matriks A disebut matriks spesial ortogonal jika memenuhi syarat berikut:*

(i) $A^TA=AA^T=I$

(ii) $\det(A)=1$

Berdasarkan Definisi 7, diketahui bahwa A merupakan anggota dari $M_3(\mathbb{R})$. Karena $\det(A)$ = 1 maka A merupakan anggota dari $\left(M_3^{**}(\mathbb{R})\right)$. Karena $\left(M_3^{**}(\mathbb{R})\right)$ merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks, maka dapat dibentuk Teorema 8.

Teorema 8 *Diberikan $\left(M_3^{**}(\mathbb{R})\right)$ adalah grup terhadap operasi perkalian matriks biasa, maka himpunan semua matriks spesial ortogonal terhadap operasi perkalian matriks biasa merupakan subgrup dari $\left(M_3^{**}(\mathbb{R})\right)$. Himpunan tersebut dinotasikan dengan* $SO(3)$.

Bukti:

Diambil sebarang dua elemen $SO(3)$, misalnya $A_1, A_2\in SO(3)$ dengan $A_1=[a_{ij}]$, $A_2=[b_{ij}]$ dan $\det(A_1)=\det(A_2)=1$, $A_1A_1^T=A_2A_2^T=I$ sedemikian sehingga akan dibuktikan bahwa untuk setiap $A_1, A_2\in SO(3)$ berlaku $A_1.(A_2)^{-1}\in SO(3)$. Karena $A_2=[b_{ij}]$, maka $(A_2)^{-1}=[b_{ij}^{-1}]$. Karena hasilkali bilangan real juga merupakan bilangan real, maka diperoleh $A_1.(A_2)^{-1}$ juga memiliki entri-entri berupa bilangan real. Dari sini diperoleh $A_1.(A_2)^{-1}$ berada di $SO(3)$. Selanjutnya $\det(A_1(A_2)^{-1})=\det(A_1)\det(A_2)=1$ dan $(A_1(A_2)^{-1})^T(A_1(A_2)^{-1})=((A_2)^{-1})^TA_1^TA_1(A_2)^{-1}=I$. Sehingga diperoleh $(A_1(A_2)^{-1})\in SO(3)$. Dengan demikian maka dapat disimpulkan terbukti bahwa $(SO(3),\cdot)$ merupakan subgrup dari $(M_3^{**}(\mathbb{R}),\cdot)$. ■

ISOMORFISMA DARI $SU(2)/\ker\varphi$ KE $SO(3)$

Didefinisikan suatu pemetaan φ dari $SU(2)$ ke $SO(3)$ sebagai berikut [8]:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \mapsto \varphi(U) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a^2-b^2) & Im(a^2+b^2) & -2\,\mathrm{Re}(ab) \\ -\mathrm{Im}(a^2-b^2) & \mathrm{Re}(a^2+b^2) & 2\,\mathrm{Im}(ab) \\ 2\,\mathrm{Re}(ab^*) & 2\,\mathrm{Im}(ab^*) & |a|^2-|b|^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Untuk membuktikan bahwa φ merupakan suatu pemetaan yang tertutup, maka diambil sebarang $U \in SU(2)$, akan dibuktikan bahwa $\varphi(U)=R$, untuk $R \in SO(3)$. Matriks U memiliki entri-entri berupa bilangan kompleks yaitu sebarang $a, b \in \mathbb{C}$. Selanjutnya, dari sebarang $a, b \in \mathbb{C}$ dapat dibentuk suatu matriks 3×3 sebagaimana didefinisikan pada (2), misalkan R. Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap $U \in SU(2)$ memiliki peta yaitu $\varphi(U)=R$. Dari [8] diketahui bahwa R adalah matriks spesial ortogonal.Dengan kata lain R merupakan elemen di $SO(3)$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa φ merupakan suatu pemetaan yang tertutup karena untuk setiap $U \in SU(2)$ terdapat $\varphi(U)=R$ sedemikian sehingga $\varphi(U)=R \in SO(3)$.

Selanjutnya perlu dibuktikan juga bahwa pemetaan φ terdefinisi dengan baik. Untuk itu diambil $U_1, U_2 \in SU(2)$, akan dibuktikan bahwa jika $U_1 = U_2$ maka $\varphi(U_1)=\varphi(U_2)$.Berdasarkan sifat tertutup dari pemetaan φ maka untuk sebarang U_1 dan U_2 terdapat $\varphi(U_1)$ dan $\varphi(U_2)$. Karena $U_1 = U_2$, maka setiap entri di U_1 sama dengan entri di U_2. Hal ini berakibat $\varphi(U_1)=\varphi(U_2)$ maka terbukti bahwa φ adalah suatu pemetaan yang terdefinisi dengan baik.

Pemetaan φ merupakan suatu homomorfisma surjektif. Hal ini dapat dibuktikan dengan diambil sebarang $U_1 U_2 \in SU(2)$, maka diperoleh $\varphi(U_1U_2)=\varphi(U_1)\varphi(U_2)$ [8], [9].Hal ini menunjukkan bahwa φ merupakan suatu homomorfisma. Selanjutnya, dibuktikan bahwa φ merupakan pemetaan yang surjektif. Untuk itu diambil sebarang $R \in SO(3)$, dari [8] diketahui bahwa R dapat didefinisikan sebagai berikut

$$R = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a^2-b^2) & Im(a^2+b^2) & -2\,\mathrm{Re}(ab) \\ -\mathrm{Im}(a^2-b^2) & \mathrm{Re}(a^2+b^2) & 2\,\mathrm{Im}(ab) \\ 2\,\mathrm{Re}(ab^*) & 2\,\mathrm{Im}(ab^*) & |a|^2-|b|^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Dari sini dapat dilihat bahwa setiap entri dari R dapat dibentuk dari sebarang dua bilangan kompleks, misalnya a,b. Sedemikian sehingga dapat dibentuk suatu matriks persegi 2×2 dengan entrinya dari a,buntuk setiap $a,b \in \mathbb{C}$. Sedemikian rupa sehingga matriks tersebut adalah matriks uniter U, yaitu $U\in SU(2)$. Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap$R \in SO(3)$ merupakan prapeta dari setiap $U \in SU(2)$. Sehingga φ merupakan pemetaan yang surjektif.

Selanjutnya dicari kernel dari φ.

$$\ker\varphi = \{U \in SU(2) |\ \varphi(U) = I, I \in SO(3)\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}, a,b \in \mathbb{C} \,\middle|\, \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(a^2-b^2) & \mathrm{Im}(a^2+b^2) & -2\mathrm{Re}(ab) \\ -\mathrm{Im}(a^2-b^2) & \mathrm{Re}(a^2+b^2) & 2\mathrm{Im}(ab) \\ 2\mathrm{Re}(ab^*) & 2\mathrm{Im}(ab^*) & |a|^2-|b|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\ker \varphi &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \middle| 2\mathrm{Im}(ab^*) = 2\mathrm{Re}(ab^*) = 0, |a|^2 - |b|^2 = 1, a, b \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \middle| b = 0,\ \mathrm{Re}\,(a^2) = |a|^2 = 1, a, b \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \middle| b = 0, a = \pm 1,\ a, b \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} = \{I, -I\}
\end{aligned}$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa kernel dari φ adalah $\ker\varphi = \{I, -I\}$. Himpunan $\ker\varphi$ merupakan subgrup normal dari $SU(2)$, maka berdasarkan Teorema 3, dapat dibentuk grup faktor dari $SU(2)$ oleh $\ker\varphi$ yaitu $SU(2)/\ker\varphi$. Dari sini dibentuk suatu pemetaan dari $SU(2)$ ke $SU(2)/\ker\varphi$ yang didefinisikan

$$\gamma(U) = U(\ker\varphi) \tag{4}$$

dengan $U(\ker\varphi) \in SU(2)/\ker\varphi$. Berdasarkan Teorema 3 juga, maka γ merupakan suatu homomorfisma natural.

Pemetaan $\varphi : SU(2) \to SO(3)$ dan $\gamma : SU(2) \to SU(2)/\ker\varphi$ sebagaimana yang masing-masing didefinisikan pada (1) dan (4) dapat diilustrasikan sebagaimana diberikan oleh Gambar 1.

$$\begin{tikzcd}
SU(2) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & SO(3) \\
& SU(2)/\ker\varphi \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Gambar 1. Hubungan pemetaan φ dan γ

Berdasarkan Gambar 1, diketahui bahwa dapat dibentuk suatu pemetaan μ dari $SU(2)/\ker\varphi$ ke $SO(3)$. Dari sini dapat dilihat bahwa pemetaan φ merupakan komposisi dari pemetaan γ dan μ, sedemikian sehingga

$$\varphi = \mu \circ \gamma \,.$$

Dengan demikian, karena φ merupakan homomorfisma surjektif, maka dapat diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\varphi &= \mu \circ \gamma \\
\varphi(U) &= \mu(U(\ker\varphi)) \\
R &= \mu(U(\ker\varphi))
\end{aligned} \tag{5}$$

dengan $R \in SO(3)$ dan $U(\ker\varphi) \in SU(2)/\ker\varphi$.

Pemetaan φ adalah suatu homomorfisma surjektif, dengan kernelnya adalah $\ker\varphi$ dan γ merupakan homomorfisma natural.Selain itu, dapat pula dibentuk suatu pemetaan μ sebagaimana dapat dilihat pada Gambar 1. Berdasarkan Teorema 4, dapat disimpulkan bahwa pemetaan μ yang memetakan setiap elemen $SU(2)/\ker\varphi$ ke $SO(3)$ sebagaimana yang didefinisikan pada (5) merupakan suatuisomorfisma grup. Dengan kata lain terdapat isomorfisma dari $SU(2)/\ker\varphi$ ke $SO(3)$.

PENUTUP

Sebarang matriks $A \in M_3(\mathbb{R})$ disebut sebagai matriks spesial ortogonal jika $AA^T = A^T A = I$ dan $\det(A) = 1$. Himpunan semua matriks spesial ortogonal dapat membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks biasa yang disebut sebagai Grup Spesial Ortogonal dan dinotasikan dengan $SO(3)$. Selanjutnya, sebarang matriks $U \in M_2(\mathbb{C})$disebut matriks spesial uniter jika $U^*U = UU^* = I$ dan det (U) = 1. Himpunan semua matriks spesial uniter membentuk sebuah grup terhadap operasi perkalian matriks biasa disebut Grup Spesial Uniter, yang dinotasikan dengan $SU(2)$.

Terdapat suatu pemetaan φ dari $SU(2)$ ke $SO(3)$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b* & a* \end{pmatrix} \mapsto \varphi(U) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a^2 - b^2) & Im(a^2 + b^2) & -2\,\mathrm{Re}(ab) \\ -\mathrm{Im}(a^2 - b^2) & \mathrm{Re}(a^2 + b^2) & 2\,\mathrm{Im}(ab) \\ 2\,\mathrm{Re}(ab*) & 2\,\mathrm{Im}(ab*) & |a|^2 - |b|^2 \end{pmatrix}.$$

Pemetaan φ merupakan suatu homomorfisma surjektif. Kernel dari φ adalah $\ker\varphi = \{I, -I\}$. Himpunan $\ker\varphi$ merupakan subgrup normal dari $SU(2)$. Grup faktor dapat dibentuk dari $\ker\varphi$ di $SU(2)$, yaitu grup faktor $SU(2)$ oleh $\ker\varphi$ yang dinotasikan dengan $SU(2)/\ker\varphi$. Selain itu dapat dibentuk homomorfismanatural γ dari $SU(2)$ ke $SU(2)/\ker\varphi$ yang didefinisikan oleh

$$\gamma(U) = U(\ker\varphi).$$

dengan $U \in SU(2)$ dan $U(\ker\varphi) \in SU(2)/\ker\varphi$. Dengan menggunakan Teorema Fundamental Homomorfisma, dapat ditunjukkan bahwa terdapat isomorfisma dari $SU(2)/\ker\varphi$ ke $SO(3)$,yaitu $\mu : SU(2)/\ker\varphi \to SO(3)$ yang didefinisikan yaitu

$$\mu(U(\ker\varphi)) = R.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Tung WK. *Group Theory in Physics*. Singapore: Worl Scientific; 1985

[2]. Riley KF, Hobson MP, Bence SJ. *Mathematical Methods for Physics and Engineering third edition*. United Kingdom: Cambridge University Press; 2006

[3]. Triola C. *SpesialOrtogonal Groups and Rotations.* Virginia: University of Mary Washington; 2009

[4]. Sternberg S. *Group Theory and Physics*. United Kingdom: Cambridge University Press; 1999

[5]. Biedenharn LC, Louck JD. *Angular Momentum in Quantum Physics.* Massachusetts: Addison-Wesley; 1981

[6]. Malik DS, Mordeson JM, Sen MK. *Introduction to Abstract Algebra.* USA: Scientific Word; 2007

[7]. Tapp K. *Matrix Group for Undergraduated*. USA: AMS; 1971

[8]. Neumaier A, Westra D. *Classical and Quantum Mechanics via Lie Algebras.* Austria: University of Vienna; 2011

[9]. Scheck F. *Quantum Physics.* Berlin; Springer; 2007

ARIF RAHMAN : FMIPA UNTAN, Pontianak, arif.amar.90@gmail.com
NILAMSARI KUSUMASTUTI : FMIPA UNTAN, Pontianak, uminilam@yahoo.com
YUNDARI : FMIPA UNTAN, Pontianak, yuendha@yahoo.com